Chapitre 5

Trigonométrie

Plan du chapitre

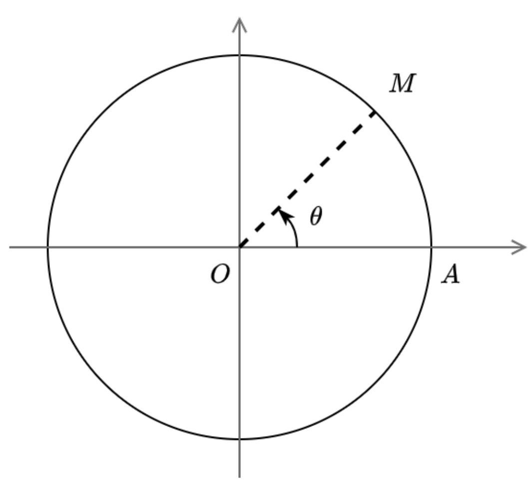
1 Fonctions cosinus et sinus

1.1 Définitions et valeurs particulières

Définition 5.1 – Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique (ou cercle unité) le cercle du plan de centre 0 et de rayon 1.

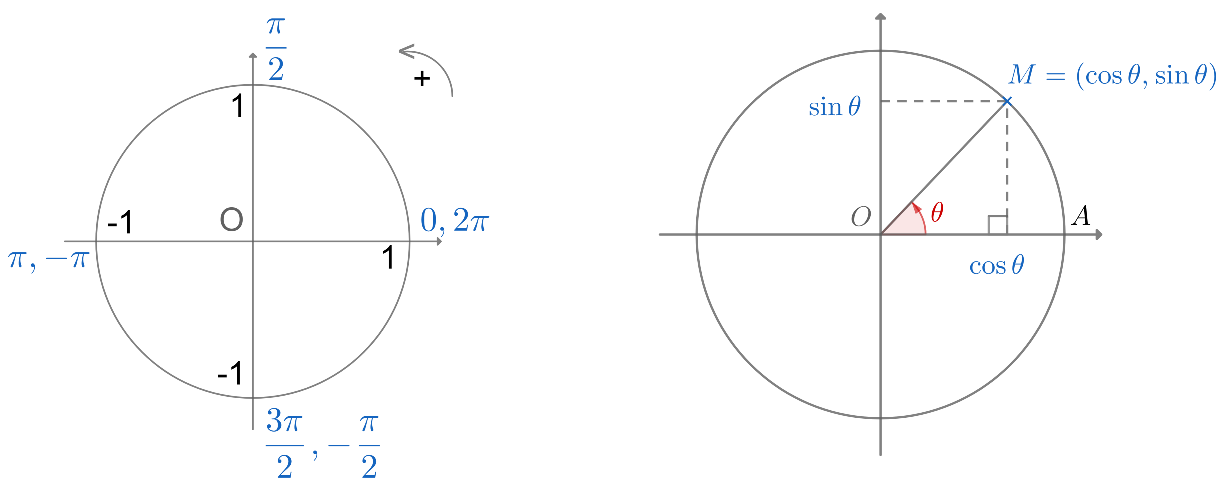
On considère A le point de coordonnées $(1,0)$ et M un point quelconque du cercle unité. On note θ l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



Plutôt que d'exprimer l'angle θ en degrés, en prépa on utilise les radians. La valeur θ en radian correspond à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ qu'on obtient lorsqu'on part du point A et qu'on parcourt le cercle jusqu'à M dans le sens *inverse* des aiguilles d'une montre, ce qu'on appelle le sens trigonométrique ou encore sens positif.

Exemple 1. Si M est le point de coordonnées $(0,1)$, alors l'arc $\overset{\frown}{AM}$ a une longueur égale à un quart de la circonférence du cercle unité, soit $\frac{2\pi\times 1}{4}$, donc l'angle θ vaut $\frac{\pi}{2}$ (radians).

Remarque. En réalité, le point M étant fixé, il y a plusieurs valeurs possibles pour l'angle θ, du fait qu'on peut faire un tour complet dans un sens ou dans l'autre. Par exemple les angles $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ représentent le même point du cercle unité :



Plus généralement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, les angles θ et $\theta+2k\pi$ représentent les mêmes points sur le cercle unité (ce qui ne veut pas dire que θ et $\theta+2k\pi$ sont égaux !).

Définition 5.2

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, il existe un unique point M du cercle unité tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ soit égal à θ. On définit alors :

$$\cos\theta := \text{"abscisse de } M\text{"}$$
$$\sin\theta := \text{"ordonnée de } M\text{"}$$

Théorème 5.3

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Par construction,

- $\cos\theta$ et $\sin\theta$ appartiennent à $\big[-1,1\big]$.
- $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ et $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$.
- $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

Démonstration. La première assertion est évidente. Pour la deuxième assertion, les angles θ et $\theta+2\pi$ représentent le même point M sur le cercle unité, donc les coordonnées $(\cos\theta,\sin\theta)$ et $(\cos(\theta+2\pi),\sin(\theta+2\pi))$ sont égales. Montrons la dernière assertion. Le triangle rectangle contenant le point M (représenté sur la figure) a une hypoténuse de longueur 1 et des côtés de longueur $|\cos\theta|$ et $|\sin\theta|$. Ainsi par le théorème de Pythagore, $|\cos\theta|^2+|\sin\theta|^2=1^2$, d'où le résultat car pour tout réel x, on a $|x|^2=x^2$. □

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Mémo-astuce : les valeurs sont croissantes pour sin et décroissantes pour cos. De plus, les valeurs suivent le motif suivant :

$$\underbrace{\frac{\sqrt{0}}{2}}_{=0} \quad \underbrace{\frac{\sqrt{1}}{2}}_{=1/2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underbrace{\frac{\sqrt{4}}{2}}_{=1}$$

1.2 Quelques formules (cosinus et sinus)

Théorème 5.4 – Formules de changement de quadran

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos x & \cos(-x) &= \cos x & &(\cos \text{ est paire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\sin(x+2\pi) &= \sin x & \sin(-x) &= -\sin x & &(\sin \text{ est impaire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\cos(x+\pi) &= -\cos x & \cos(\pi-x) &= -\cos x\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x & \sin(\pi-x) &= \sin x\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x
\end{aligned}$$

Astuce : toutes ces formules sont faciles à retrouver sur un dessin avec le point M associé à l'angle $x = \frac{\pi}{6}$:

Théorème 5.5 – Formules d'addition

Pour tous réels a, b

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\\[1em]
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{aligned}$$

Mémo-astuce : avec cos, on *change le signe*, mais pas avec sin. En revanche, sin *mélange* les cos et les sin, tandis que cos ne cause pas de mélange. De plus, les deux formules avec $a-b$ se déduisent aisément des autres en remplaçant b par $-b$.

Exemple 2. Retrouver la formule de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ avec une formule d'addition.

Théorème 5.6 – Formules de duplication

Pour tout réel x,

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

Mémo-astuce : La formule $\sin(2x)$ peut se retrouver à partir de $\sin(a+b)$ avec $a=b=x$. Pour les trois autres, on peut se rappeler le dessin très pratique ci-contre :

Muni de ce diagramme, on peut raisonner comme avec des vecteurs. Par exemple, comme

$$\begin{array}{ccccc} (1,-1) & = & 1\times(1,0) & + & (-1)\times(0,1) \\ \underbrace{\cos(2x)}_{\text{"vecteur" }(1,-1)} & = & 1\times \underbrace{\cos^2 x}_{\text{"vecteur" }(1,0)} & + & (-1)\times \underbrace{\sin^2 x}_{\text{"vecteur" }(0,1)} \end{array}$$

Exemple 3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx$. En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx$.

Théorème 5.7 – Formules de linéarisation

Pour tous réels a, b,

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)\\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)\end{aligned}$$

Démonstration. Prouvons par exemple la deuxième formule :

□

Mémo-astuce : comme le montre la preuve, on les retrouve facilement à partir des formules d'addition. Pour $\cos a \cos b$ et $\sin a \sin b$, comme il n'y a pas de mélange de cosinus et de sinus, il faut utiliser les formules de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$. Pour $\sin a \cos b$, comme il y a un mélange, il faut se servir de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$.

1.3 Parenthèse : congruences dans les réels

Notation. On a vu que $2\mathbb{N}+1=\{2n+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Sur le même principe, on peut définir, pour tous réels a et b :

$$a+b\mathbb{Z} := \{a+bk \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{x\in\mathbb{R} \mid \exists k\in\mathbb{Z} \quad x=a+bk\}$$

Exemple 4. $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} =$ ....

Notation. Soit $x, a, b\in\mathbb{R}$. On écrit $x\equiv a\ [b]$ s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=a+kb$.

Théorème 5.8

$x\equiv a\ [b] \iff x\in a+b\mathbb{Z}$

Exemple 5. $x\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \quad\iff\quad \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad\iff\quad x\in\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$

Théorème 5.9

Pour les congruences, on dispose des règles de calcul suivantes :

- On peut multiplier ou diviser par une constante non nulle (crochet inclus) :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^* \qquad a\equiv b\ [c] \iff \lambda a\equiv\lambda b\ [\lambda c]$$

- On peut additionner ou soustraire une même quantité (crochet exclu) :

$$\forall u\in\mathbb{R} \qquad a\equiv b\ [c] \iff a+u\equiv b+u\ [c]$$

1.4 (In)équations trigonométriques (cosinus et sinus)

Théorème 5.10 – Équations et trigonométrie

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a = \cos b \iff \left(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b\ [2\pi]\right)$$
$$\sin a = \sin b \iff \left(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b\ [2\pi]\right)$$

On remarquera que $\cos(-b) = \cos b$, il est donc cohérent qu'il faille considérer les deux cas : a congru à b ou à $-b$. De même, $\sin(\pi - b) = \sin b$ ce qui explique la situation pour le sinus.

Exemple 6. Résoudre $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Pour les inégalités, on les traite au cas par cas en s'aidant d'un cercle trigonométrique.

Méthode – La méthode de la “pince” pour résoudre une inégalité trigonométrique

Considérons par exemple l’inégalité $\cos(\theta) \geq a$, avec $a \in \mathbb{R}$ et θ une expression (qui peut dépendre d’un réel x).

1. On **trace** le cercle trigonométrique et on repère les deux points du cercle pour lesquelles l’inégalité $\cos(\theta) \geq a$ devient une égalité, i.e. où le cosinus est égal à a.
2. On marque la portion de cercle qui entre ces deux points où l’inégalité $\cos\theta \geq a$ est vérifiée (on “pince” cette portion de cercle entre ces deux points).
3. On choisit deux angles θ_1 et θ_2 qui paramètrent ces points, de sorte que la portion de cercle corresponde exactement aux angles $\theta' \in \left[\theta_1, \theta_2\right]$.
4. Alors,

$$\begin{aligned} \cos\theta \geq a \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta \in \left[\theta_1 + 2k\pi, \quad \theta_2 + 2k\pi\right] \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 + 2k\pi \quad \leq \quad \theta \quad \leq \quad \theta_2 + 2k\pi \end{aligned}$$

Cette méthode est plus claire sur un exemple :

Exemple 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \leq -\dfrac{1}{2}$

D’autres valeurs sont possibles pour θ_1 et θ_2, qu’on obtient en ajoutant ou retranchant 2π. Dans l’exemple ci-dessus, on aurait pu prendre $\theta_1 = -\dfrac{4\pi}{3}$ et $\theta_2 = -\dfrac{2\pi}{3}$. On serait arrivé au même ensemble de solutions, mais avec une écriture différente (à gauche ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \bigcup_{k' \in \mathbb{Z}} \left[-\pi + k'\pi \quad , \quad -\frac{2\pi}{3} + k'\pi\right] \\ &= \ldots \cup \underbrace{\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]}_{k'=0} \cup \underbrace{\left[0, \frac{\pi}{3}\right]}_{k'=1} \cup \underbrace{\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]}_{k'=2} \cup \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{3} + k\pi\right] \\ &= \ldots \cup \underbrace{\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]}_{k=-1} \cup \underbrace{\left[0, \frac{\pi}{3}\right]}_{k=0} \cup \underbrace{\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]}_{k=1} \cup \ldots \end{aligned}$$

Le choix des valeurs θ_1 et θ_2 est l'étape la plus cruciale. Pour un même point, il y a beaucoup de valeurs possibles : dans notre exemple $\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \ldots$ pour l'un des points et $\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \ldots$ pour l'autre. Il faut s'assurer que la portion $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$ est bien celle qu'on a marquée. Les pièges sont nombreux :

- Il faut s'assurer que $\theta_1 \leq \theta_2$. Si on avait pris $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$, l'inégalité $\theta_1 + 2k\pi \leq \ldots \leq \theta_2 + 2k\pi$ serait fausse. Dit autrement, la portion $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$ serait vide.
- Si on avait pris $\theta_1 = -\frac{4\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$, la portion $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$ ferait un tour complet du cercle : cela ferait trop de solutions !
- Si on avait inversé les rôles et pris $\theta_1 = -\frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$, la portion $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$ est en fait celle qui recouvre l'autre partie du cercle que celle qu'on a marquée !

Pour éviter les pièges, il faut s'assurer qu'on reste tout le temps sur la bonne portion du cercle lorsqu'on va de θ_1 à θ_2 en tournant dans le sens trigonométrique (θ_1 est donc la plus "petite" valeur de la portion de cercle lorsqu'on tourne dans le sens trigonométrique).

Remarque. Avec une inégalité stricte (par exemple $\sin(\theta) < a$), cela entraine que les valeurs θ_1 et θ_2 doivent être exclues : on aura alors

$$\exists k \in \mathbb{Z} \qquad \theta_1 + 2k\pi \quad < \quad \theta \quad < \quad \theta_2 + 2k\pi$$

2 Fonction tangente

2.1 Définition et valeur particulières

Définition 5.11 – Tangente

La fonction <u>tangente</u> est définie par $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Cette fonction est définie en tout réel x sauf en les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Autrement dit, le domaine de définiton de la fonction tan est $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

À partir de l'expression de $\tan x$, on retrouve facilement des valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

2.2 Quelques formules (tangente)

Toujours à partir de la définition, on peut en déduire des formules sur $\tan(x+\pi)$, $\tan(\pi - x)$, etc. Les plus importantes sont :

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad (\tan \text{ est impaire})$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x \qquad (\tan \text{ est } \pi\text{-périodique})$$

Théorème 5.12 – Formules d'addition, tangente

Pour tous réels a et b,

- Si $a, b, a+b \in D_{\tan}$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

- Si $a, b, a-b \in D_{\tan}$, on a :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

La condition $a, b, a \pm b \in D_{\tan}$ permet d'assurer que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a \pm b)$ ont un sens. Il se trouve que sous cette condition, on a aussi $\tan a \tan b \neq \pm 1$, de sorte que le dénominateur de ces formules ne s'annule pas.

Démonstration. On écrit $\tan(a \pm b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)}$ et on poursuit avec les formules d'addition appropriées. □

Remarque. De ces formules, on obtient ainsi formule de duplication de $\tan(2a)$:

$$\tan(2a) = \tan(a+a) =$$

Cette formule n'est valide que si

2.3 Équations avec tangente

Théorème 5.13 – Équations et trigonométrie

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b\ [\pi]$$

Exemple 8. Résoudre l'équation $\tan(2x) = \sqrt{3}$.

2.4 Quelques compléments

Théorème 5.14 – Formules de l'angle moitié

Pour tout réel $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \sin(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

La dernière formule n'étant valide que si $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

La troisième formule est très importante, il s'agit en fait d'un cas particulier de la formule $\tan(a+b) = \ldots$ avec $a = b = x$.

Remarque. À ce stade, ces formules nous sont peu utiles... Mais lorsqu'on devra calculer des intégrales de fonctions trigonométriques, elles peuvent nous sauver la mise !

Dans un triangle *rectangle*, si x est un angle qui n'est pas l'angle droit,

$$\cos x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{H}} \qquad \tan x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{A}} \qquad \text{(relation CAH-SOH-TOA)}$$

avec H la longueur de l'hypoténuse, O celle du côté opposé à l'angle x, et A celle du côté adjacent (qui n'est pas l'hypoténuse).

Définition 5.15 – Cotangente

La cotangente d'un réel x est définie par $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$. Elle n'est donc pas définie en $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Dit autrement, $D_{\text{cotan}} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

3 Méthodes pour les exercices

Bien apprendre + bien dormir = bien mémoriser.

Bien sûr, vous pouvez mettre au point vos propres mémo-astuces !